Prova d'accés a la Universitat (2005)

Selectivitat

Matemàtiques II

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. Estudiau el sistema segons els valors de m (7 punts) i resoleu-lo per a m = –1 (3 punts).

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ my + z &= 0 \\ x + (m+1)y + mz &= m+1 \end{aligned}$$

2. Trobau l'equació de la recta que talla perpendicularment les rectes x = y = z i x = y +1 = 2z – 2.

3. Es considera la funció $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$, on n és un enter positiu. Es demana:
   a) Trobar els extrems relatius d'aquesta funció (5 punts).
   b) Calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$ i $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ (2 punts).
   c) Fer una gràfica de la funció en el cas n = 2 (3 punts).

4. Enunciau el teorema de Rolle (4 punts). Demostrau que la funció $f(x) = x^3 - x + a$ compleix la hipòtesi d'aquest teorema a l'interval [0,1] qualsevol que sigui el valor de a. Trobau el punt en el qual es compleix la tesi (6 punts).

Opció B

1. Una matriu quadrada es diu ortogonal si la seva inversa coincideix amb la transposada. Es demana:
   a) Demostrar que una matriu de la forma $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in$ R, és ortogonal. (4 punts)
   b) Calcular x i y de manera que la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ sigui ortogonal. (6 punts)

2. Estudiau la posició relativa dels plans següents segons els valors de k (6 punts):
   $(k - 2)x + y + (2k + 1)z = 1$
   $2x + (k - 1)y - z = 0$
   Trobau l'equació contínua de la recta d'intersecció dels plans en el cas k = –1 (4 punts).

3. Es considera la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$. Es demana:
   a) Trobar els extrems relatius d'aquesta funció (5 punts).
   b) Calcular $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ i $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ (2 punts).
   c) Fer una gràfica de la funció (3 punts).

4. Feu un dibuix de la regió limitada per la corba y = sin x.cos x i les rectes x = 0, x = 3π/2, y = 0 (4 punts). Calculau-ne l'àrea (6 punts).